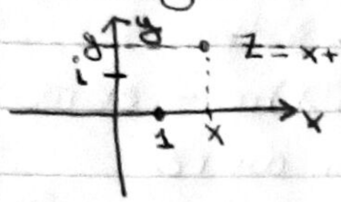
Μάθημα 2ο 06/03/2020

Αντιστοιχούμε καταρχάς το $(\mathbb{C},+)$ με τον δχ. διάστασης 2 (πάνω από το $\mathbb{R}$) δηλαδή τον $\mathbb{R}^2$ και χρησιμοποιούμε την πρόσθεση (αλλά και τον βαθμωτό πολλαπλ.) του $\mathbb{R}^2$ για να ορίσουμε την πρόσθεση στο $\mathbb{C}$. Δηλαδή: $z = x+iy = x\cdot\underbrace{(1,0)}_{=1} + y\,\underbrace{(0,1)}_{=i} = (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$=(0,1)y$
$=iy$

$\boxed{z=x+iy}$: ονομάζεται $\boxed{\text{αλγεβρική}}\,\boxed{\text{μορφή}}$

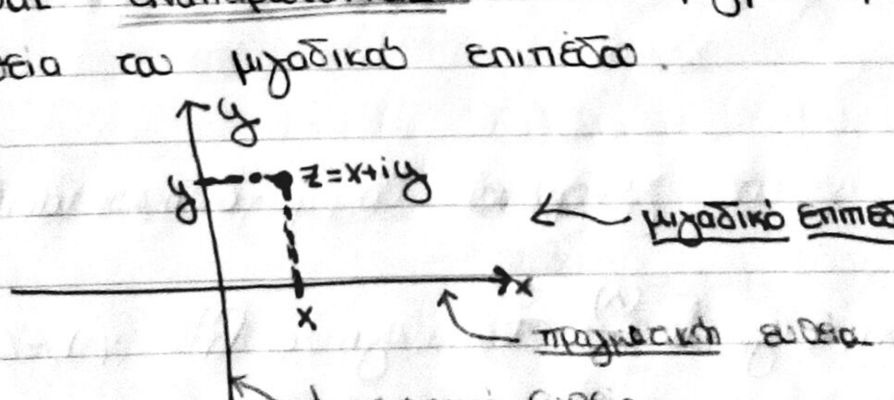


Το + στο $\mathbb{C}$ έχει όλες τις ιδιότητες του + στο $\mathbb{R}^2$ με ουδέτερο στοιχείο το $0=0+0\cdot i=0\cdot(1,0)+0(0,1)$.
Η πρόσθεση στο $\mathbb{C}$ επεκτείνει την πρόσθεση στο $\mathbb{R}$ δηλαδή
$\forall\, x_1,x_2\in\mathbb{R} \iff (x_1,0),\ (x_2,0)\in\mathbb{R}^2$ [που αντιστοιχεί στο $\mathbb{C}$]

$(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)$ που είναι πραγματικός αριθμός ως στοιχείο του $\mathbb{C}$, τουλάχιστον ως προς το +.

Παρατήρηση

Οι πραγματικοί αριθμοί αντιστοιχούν με $(x,0)=x(1,0)\hat{=}x\cdot 1=x$
Οι φανταστικοί (imaginary) αριθμοί αντιστοιχούν με $(0,y)=y(0,1)\hat{=}yi$ και αναπαρίστανται στην πραγματική και φανταστική ευθεία του μιγαδικού επιπέδου.



Προφανώς, γεωμετρικά $\mathbb{C} \ll=\gg \mathbb{R}^2$

Προφανώς, για να είναι το $\mathbb{C}$ σώμα, εκτός από το + (σύν) θέλει και επί. Ποιο είναι αυτό???

Απάντηση: Αφού ① θα είναι σώμα, δηλαδή θα κάνουμε πράξεις με τις γνωστές ιδιότητες του R, αφού ② το $i \in \mathbb{C}$ και αφού ③ θέλουμε [αν δεν το είπαμε πριν το λέμε τώρα]

$i^2 = -1 \iff i \cdot i = -1$

[Υπενθύμιση: Ξεκινάμε να ψάχνουμε άλλους - εκτός από τους πραγματικούς - αριθμούς έτσι ώστε τουλάχιστον ένας να ικανοποιεί $z^2 = -1$.
Επιλέγουμε / Θέτουμε ένας τέτοιος αριθμός z να είναι το i, δηλαδή $i^2 = -1$.]

⟹ Άρα θα πρέπει υπό αυτές τις συνθήκες να ισχύει

$$\boxed{z_1 \cdot z_2} \overset{\text{αντιστοίχιση } z_1=(x_1+y_1 i),\ z_2=(x_2+y_2 i)}{=} (x_1+y_1 i)\cdot(x_2+y_2 i)$$

$$\underset{\text{πράξεις όπως στο } \mathbb{R}}{=} x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 \cdot x_2 \cdot i + y_1 y_2 i^2$$

$$= \boxed{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 \cdot x_2)}$$

[Δηλ. αν το δούμε ως πολλαπλασιασμό ζευγών έχουμε $(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$]

<u>Άρα</u>,

Ορίζουμε ως γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών

$$z_k = x_k + y_k \cdot i \overset{(\lambda)}{=} (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2, \quad k=1,2$$

τον μιγαδικό αριθμό:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)}$$

Αυτός ο (εσωτερικός) πολλαπλασιασμός αποδεικνύεται ότι έχει όλες τις ιδιότητες « που πρέπει να έχει »
και ότι το $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι πράγματι σώμα. ⊛
[το $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ με τον πολλαπλασιασμό αυτόν είναι μεταθετική ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το 1]

⊛ και το $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ επεκτείνει το $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ και ισχύει $\boxed{i^2 = -1}$

$$\left[i^2 = i \cdot i = (0+1i)\cdot(0+1i) = \underbrace{0\cdot 0 - 1\cdot 1}_{=-1} + i\underbrace{(0\cdot 1 + 0\cdot 1)}_{=0} = -1 \right.$$

$$\underbrace{(x_1,0)}_{\substack{= x_1 + 0i \\ \downarrow \\ \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}}} \underbrace{(x_2,0)}_{\substack{= x_2 + 0i \\ \downarrow \\ \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}}} = x_1 x_2 - 0\,0 + i(x_1 \cdot 0 + 0\, x_2) = x_1 x_2 + i\, 0 = (x_1 x_2, 0) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Το 1 είναι ουδέτερο στοιχείο ως προς τον (μιγαδικό) πολλαπλασιασμό

$$\forall z \in \mathbb{C} : 1 \cdot z = (1 + 0i)\cdot(x + y\cdot i) = 1\cdot x - 0\cdot y + i(1y + 0x) = x + y\, i = z$$

Τι είναι ο αντίστροφος ενός $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$???

Απάντηση

Θέλουμε να βρούμε για δοσμένο $z \in \mathbb{C}^*$ (τουλάχιστον ένα - και βασικά μόνο ένα) $w \in \mathbb{C}^*$ με την ιδιότητα: $z w = 1$

Έστω $z = x + yi$, $w = a + bi$

$$\Rightarrow (x+yi)\cdot(a+bi) = \underbrace{xa - by + i(ya - xb)}_{\hat{=}\,(xa - by,\ ya + xb)} = 1 = 1 + 0i \ \hat{=}\ (1,0)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} xa - by = 1 \\ ya + xb = 0 \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\hat{=}\, a + bi} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι ο (μοναδικός, αφού μόνο αυτός προκύπτει) μιγαδικός αριθμός $w \in \mathbb{C}$ για τον οποίο ισχύει $z \cdot w = 1$ για δοσμένο $\underset{x+yi}{\overset{}{z}} \in \mathbb{C}^* \overset{(\omega)}{=} (x,y) \neq (0,0)$

Είναι ο $w = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{\in \mathbb{R}} + i\underbrace{\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)}_{\in \mathbb{R}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

Διαπιστώνουμε ότι:

(1) $w \in \mathbb{C}^*$

(2) $w \cdot z = 1$ (μετά από πράξεις)

Άρα ο w αυτός είναι ο αντίστροφος του $z \in \mathbb{C}^*$ (ως προς τον $\cdot$)

Άρα $w = z^{-1} = \frac{1}{z}$

εδώ το $1/z$ είναι το σύμβολο του αντιστρόφου

Άρα: $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

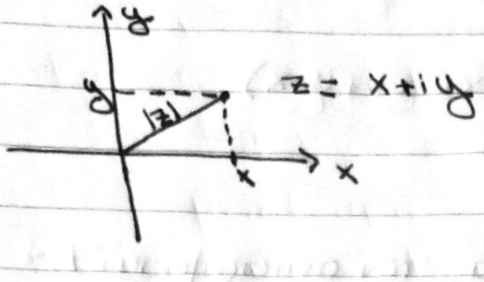
Ορισμός: Έστω $z = x+iy \in \mathbb{C}$ [με $(x,y) \in \mathbb{R}^2$]

Τότε, $\operatorname{Re} z = x$: πραγματικό μέρος του z.
$\operatorname{Im} z = y$: φανταστικό (imaginary) μέρος του z.

$\Leftrightarrow z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$, όπου $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$: η απόλυτη τιμή του z

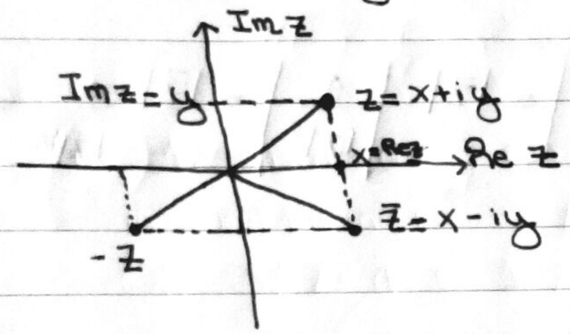
$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\|(x,y)\|$: μέτρο του z.



Προφανώς, η απόλυτη τιμή $|\cdot|:\mathbb{C}\to[0,\infty)$ είναι επέκταση της $|\cdot|:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ δηλαδή της απόλυτης τιμής στο $\mathbb{R}$:

$$|x+i\cdot 0|=\sqrt{x^2+0^2}=\sqrt{x^2}=|x|.$$

→ $\bar{z}=x-iy$ είναι (μιγ. αριθμός) του z



Πρόταση

Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε: $\mathrm{Re}\,z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\,z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

$z\cdot\bar{z}=|z|^2$

$|-z|=|z|=|\bar{z}|$

$\bar{\bar{z}}=z$

$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2$, $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$.

$|\mathrm{Re}\,z|\le|z|$, $|\mathrm{Im}\,z|\le|z|$ και ισχύει η τριγωνική

ανισότητα: $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

Απόδειξη

$z=x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \bar{z}=x-iy$

$\Rightarrow \bullet\ z+\bar{z}=2x=2\,\mathrm{Re}\,z$

- $z-\bar{z} = 2iy = 2\cdot i\,\mathrm{Im}z$

- $z\cdot\bar{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2-(y)(-y)+i\,(x(-y)+yx)$
$= x^2+y^2 = |z|^2.$

$\Rightarrow$ (7) Αφού - όπως είδαμε για τον αντίστροφο του z -

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

[Πράγματι $1 = \dfrac{\bar{z}\cdot z}{|z|^2} \underset{\uparrow}{=} 1.$ βλέπε πιο πάνω

με (8) $\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right| = \left|\bar{z}\cdot\frac{1}{|z|^2}\right| = |\bar{z}|\cdot\left|\frac{1}{|z|^2}\right| = |\bar{z}|\cdot\frac{1}{|z|^2} =$

$$= |z|\cdot\frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$$

και $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)} = \overline{\left(\bar{z}\cdot\frac{1}{|z|^2}\right)} = \bar{\bar{z}}\cdot\frac{1}{|z|^2} =$

$$= z\cdot\frac{1}{|z|^2} = z\cdot\frac{1}{|z|^2} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$\rightarrow$ Ασκήσεις : ΑΟ : όσες ιδιότητες των πράξεων με μιγαδικούς δεν δείξαμε εδώ

Α1 , Α2 ΟΧΙ Α3-Α4

A.5 Δ.ο η $f: \mathbb{C}\setminus\{0\} = \mathbb{C}^*$, $f(z) = \frac{1}{z}$, είναι "1-1" και "επί".

Λύση

Έστω $w \in \mathbb{C}^*$ θα βρω $z \in \mathbb{C}^*$ με $\frac{1}{z} = w \Leftrightarrow 1 = z\cdot w$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{w}$$

[δηλαδή το z για το οποίο $f(z)=w$ είναι ο αντίστροφος του w
$\Rightarrow f$ επί]

$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2} \iff z_2 = z_1 \Rightarrow f$ "1-1" ■

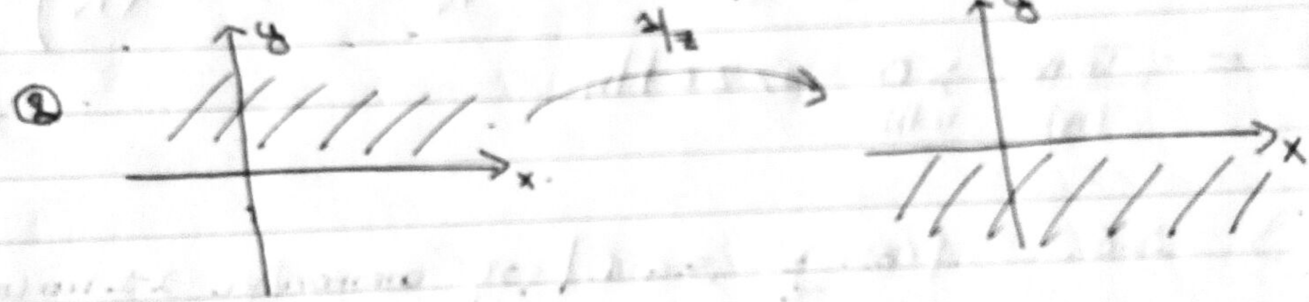
(A.6) Δ.ό η $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ $f(z)=\frac{1}{z}$ απεικονίζει 1-1 και επί

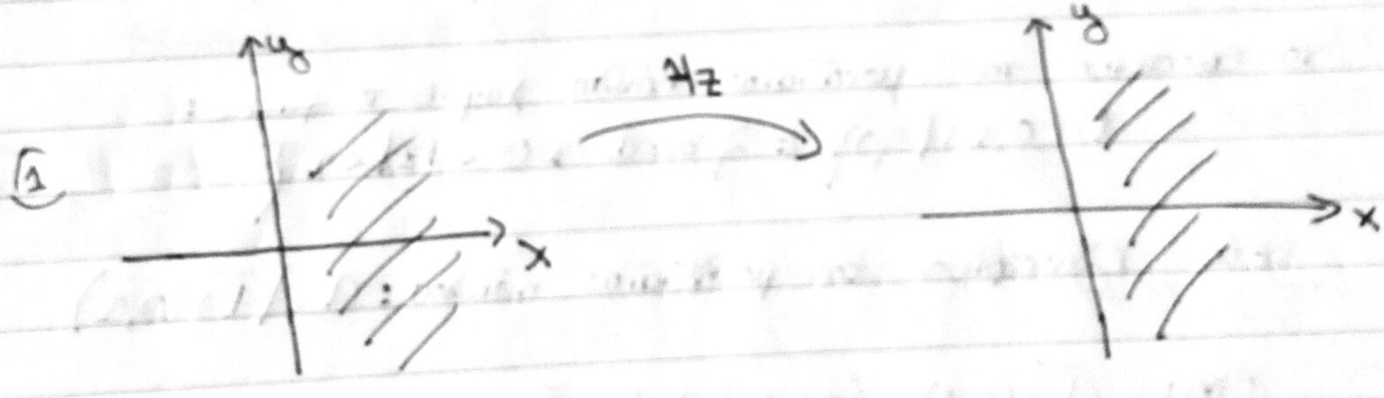
[ΑΒ. $f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^*$] ① το ανοιχτό δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο,

δηλ. $H_r = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ στο εαυτό του,

και ② το ανοιχτό άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο
δηλ. $H_k = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ στο ανοιχτό

κάτω ημιεπίπεδο $H_d = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$





Λύση
Αφού (ΑΒ) η $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ είναι 1-1, θα είναι και οι
περιορισμοί της $f|_{H_r} : H_r \to \mathbb{C}$ και

$f|_{H_k} : H_k \to \mathbb{C}$

Έστω $z \in H_r \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z}{|z|^2} \Rightarrow$

$$Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{Re z}{|z|^2} \overset{z\in H_r}{>} 0 \quad , \text{δηλαδή } \frac{1}{z} \in H_r .$$

Έστω $z \in H_u \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{Re z - i\, Im z}{|z|^2}$

$$\Rightarrow Im\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{Im z}{|z|^2} \underset{Im z>0}{<} 0 \text{ , δηλαδή } \frac{1}{z} \in H_d .$$

Επί ???

Έστω $w \in H_r$. Άρα $\frac{1}{z} = w \Leftrightarrow z = \frac{1}{w} \in H_r$

Έστω $w \in H_d$. Άρα $\frac{1}{z} = w \Leftrightarrow z = \frac{1}{w} \Rightarrow Im z = Im\left(\frac{1}{w}\right) =$

$$= -\frac{Im w}{|w|^2} \underset{w\in H_d}{>} 0 \Rightarrow z \in H_u$$

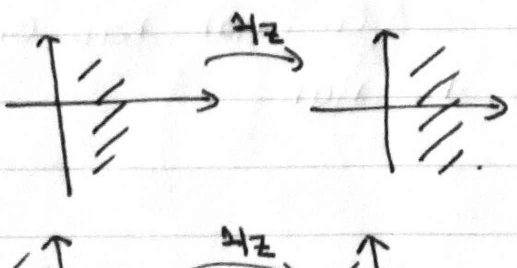
A.7 Δ.ό. $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ απεικονίζει 1-1 και επί

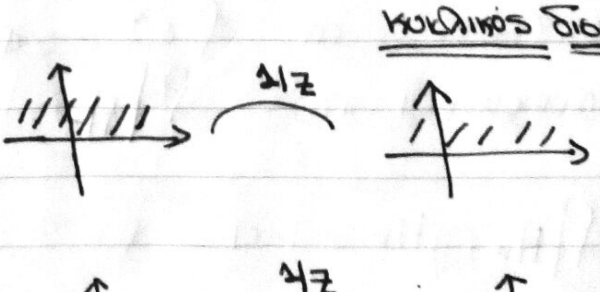
το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου χωρίς το μηδέν:

$$D(0,1) \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

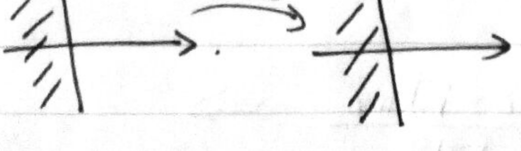
στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου: $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1)$

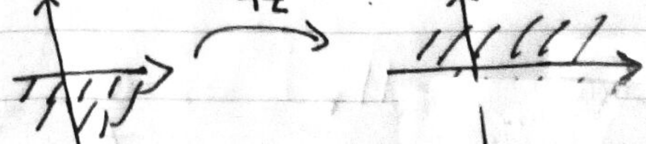
όπου $\overline{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ δηλαδή κλειστός μοναδιαίος κυκλικός δίσκος.

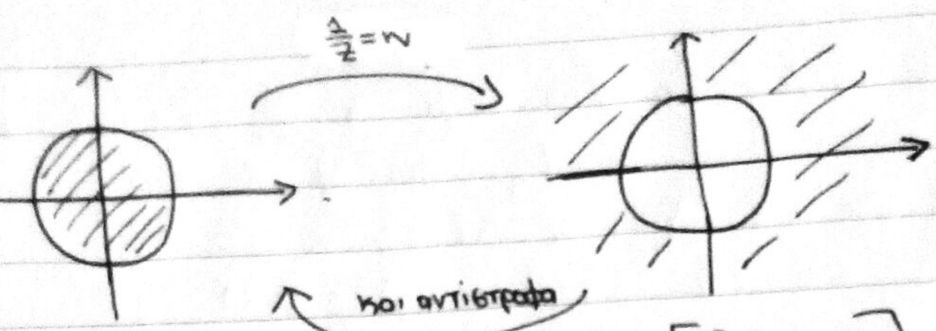




και







$\frac{1}{w} = z \longrightarrow$ [Άσκηση]

Λύση

"1-1" οκ, ως περιορισμός 1-1 συνάρτησης (βλέπε Α5)

Έστω $z \in D(0,1)\setminus\{0\} \underset{\text{ορισμός}}{\iff} 0<|z|<1$

~~Θ.ν.δ.ό~~ $\cancel{\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{z} \in \mathbb{C}\setminus \bar{D}(0,1)}$

"Επί":

Έστω $z \in D(0,1)\setminus\{0\} \iff 0<|z|<1$

Θ.ν.δ.ό:

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{z} \in \mathbb{C}\setminus \bar{D}(0,1)$$

Έστω $w \in \mathbb{C}\setminus \bar{D}(0,1) \iff |w|>1$.

Τότε η f απεικονίζει το $z = \frac{1}{w}$ στο w

$\left[f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\frac{1}{w}} = w\right]$ με $|z| = \left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{\underbrace{|w|}_{>0}} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow z \in D(0,1)\setminus\{0\}$ ■